ӘОЖ: 514

КЕЙБІР АЛГЕБРАЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ӘДІСТЕРДІҢ КӨМЕГІМЕН ШЫҒАРУ

Салхаден Райхан

Магистрант

Х.Досмұхамедов атындағы Атырау университеті, Атырау қ, Қазақстан Республикасы

Ғылыми жетекшісі, пед.ғылым.канд., профессор – **Утепқалиев С.**

Аннотация: Мақалада геометриның көмегімен кейбір алгебралық есептерді (мәтінді есептер, таңсіздіктерді, теңдеулерді және олардың жүйесі) шығару әдістемесі көрсетілген.

Кейбір алгебралық есептерді шығару қиындық туғызуы мүмкін, бірақ геометриялық теоремаларды, тәсілдерді қолданып шығару қиындық туғызбайды. Мұнда есеп мәтінін, онда берілген өрнектердің геометрилық мағынасын түсіну қажет болады.

Математикалық есептердің геометрияның көмегімен шығару оқушылардың математикалық біліктілігінің арқасында олардың құзіреттілігін, математикалық сауаттылығын динамикалық жүйелейді, басқа ғылымдар мен практика есептерін шығара білуге жетелейді.

Алгебра таңбалармен жазылған геометриядан басқа ештене емес, ал геометрия – бұл сандармен бейнеленген жай ғана алгебра», - София Жермен.

Геометриялық әдістер қозғалысқа, жұмысқа қатысты есептер шығаруда, тригонометрия есептерін шығаруда, шамалардың ең үлкен және ең кіші мәндерін есептеуді, сол сияқты теңсіздіктерді дәлелдеуде, теңдеулерд және олардың олардың жүйелерін шешуде қолданылады. Сұрақтың күрделілігі мен стандартты емес сипатына байланысты есептерді шығарудың геометриялық әдісі мектептегі математика курсында арнайы тақырып ретінде оқытылмайды. Көптеген алгебралық есептерді аналитикалық жолмен шығару өте қиын болуы мүмкін. Осылайша, таңдалған тақырып өзекті және перспективалы болып табылады.

Геометриялық әдісті қолданып есептер шығаруда көрнекі немесе сызба түріндегі шарттар, бейнелеу басшылыққа алынады. Есептердің шарттарын дұрыс түсінуге көмектесетін сызба, оларды көрнекі айқын болуы есепті шығаруға, тиімді әдісті табуға айтарлықтай жеңілдетеді. Бұл зерттеуді одан да маңызды етеді.

Бұл тақырыптың өзектілігі біртұтас математика ғылымын құрайтын геометрия мен алгебраны байланыстыру қажеттілігінде. Сондай-ақ, математикалық құзіреттілікті дамыту. Уақытты үнемдеуге көмектесетін мәселені шешу әдістерін қолдана білу. Көбінесе әртүрлі олимпиадалар белгілі бір есептерді шешу үшін әртүрлі стандартты емес тәсілдерді қолдану қабілетін қалыптастыру.

а) Мәтінді есептер.

Бұл түрдегі есептер белгілі бір жұмыстың бірнеше субъектілерің орындауы туралы ақпаратты қамтиды, мұнда жылдамдықтың рөлін орындау, қашықтықтың рөлін жұмыс көлем атқарады.

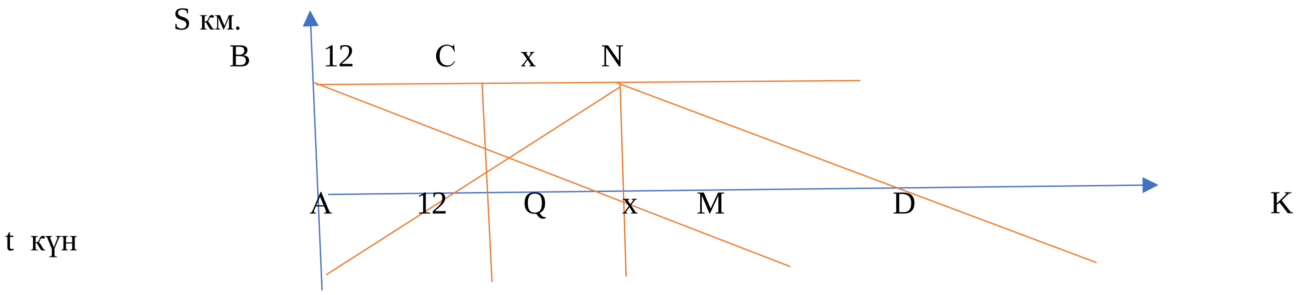
Есеп 1. Бір тапсырманы бірге орындаған екі жұмысшы оны 12 күнде бітіреді. Алғашында олардың біреуі ғана жұмыс істесе және ол бүкіл жұмыстың жартысын аяқтаған кезде, оның орнына екінші жұмысшы келсе, онда барлық тапсырма 2 5 күнде орындалады. Әрбір жұмысшы барлық тапсырманы неше күнде орындай алады?

Шешуі: Бірінші жұмысшы екіншісіне қарағанда жұмысты тез орындасйды делік. AN - бірінші жұмысшының графигі, ал BD - екіншісінің графигі болсын. AQ - олардың бірлескен жұмыс уақытын өрнектесін, AQ = 12 сағ.

NKDB параллелеограмын жүргізелік, сонда AK = 50, QK = 38. $\Delta BPN \backsim \Delta APD$

ұқсастығынан, аламыз: $\frac{12+x}{x} = \frac{12+38-(12+x)}{12}$, $\frac{12+x}{x} = \frac{38+x}{12}$, бұдан табамыз: $x_1 = 18$, $x_2 = 8$.

$x_1 = 18$ мәні алынбайды, өйткені бірінші жұмысшы жұмысты тез орындайды (сурет1). Сонда бірінші жұмысшы тапсырманы $12 + 8 = 20$ күнде,
ал екіншісі $38 – 8 = 30$ күнде аяқтайды.



Бұл есепте шығарудың геометрилық әдісі графикалық әдісте үшбұрыштардың ұқсастығы мен теңдеулер әдісін интеграциялауды көрсетеді.

Мәтінді есептерді геометриялық әдіс арқылы шешу дәлдікке негізделген

Геометриялық қатынастар. Мұнда шешімнің артықшылығы оның анықтығы.

Күрделі теңдеулер мен теңсіздіктерді, олардың жүйесін шешу геометриның көмегімен шығару аналитикалық әдіске қарағанда жақсырақ, көрнекті.

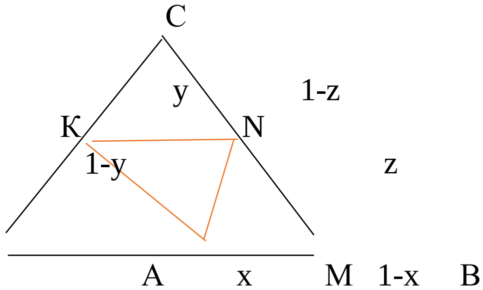
1) Фигураның ауданын пайдалану;
2) Пифагор, синустар, косинустар теоремаларын қолдану;
3) Векторларды қолдану.

а) Ауданды пайдаланып есептер шығару

Есеп 2. Теңсіздікті дәлелдеңдер: $x(1- y) + y(1- z) + z(1- x) < 1$, мұнда $x,y, z \in (0;1)$.

Шешуі. Қабырғалары 1 см. тең дұрыс ABC үшбұрышын саламыз.

Үшбұрыштың AB, BC, AC қабырғаларынан сәйкес M, N, K нүктелерін алып, $AM = x$, $BK = y$, $CN = z$ деп белгілелік (сурет 2). Сонда $MB=1 - x$, $CK=1 - y$, $BN=1 – z$.



Сурет 2.

AMN, CNK, BMK үшбұрыштардың аудандары сәйкес:

$$S_{AKM} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (1-y) \cdot Sin60^{\circ} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (1-y) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{CKN} = \frac{1}{2} \cdot y \cdot (1-z) \cdot Sin60^{\circ} = \frac{1}{2} \cdot y \cdot (1-z) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{BMN} = \frac{1}{2} \cdot z \cdot (1-x) \cdot Sin60^{\circ} = \frac{1}{2} \cdot z \cdot (1-x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Аламыз: $S_{AKM} + S_{CKN} + S_{BMN} < S_{ABC}$,

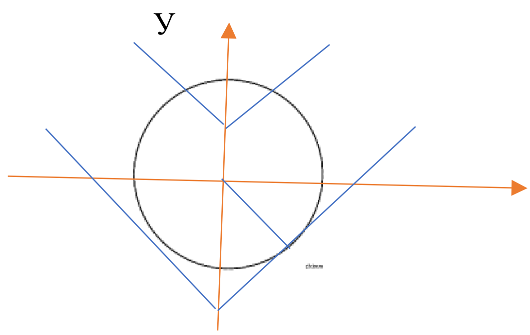
$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot (1-y) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot y \cdot (1-z) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot z \cdot (1-x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Демек: $(1- y) + y(1- z) + z(1- x) < 1$.

Есеп 3. Теңдеулер жүйесі дәл екі шешімі болатындай a параметрінің мәндерін табыңдар: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = |x| + a \end{cases}$.

Шешуі. Жүйенің бірінші теңдеуі $x^2 + y^2 = 1$ - центрі координаталар басында, радиусы 1-ге тең шеңбер.

$y = |x| + a$ теңдеу төбесі Оу өсінде орналасқан задаёт семейство сызбада көрсетілген «бұрыштықтар».



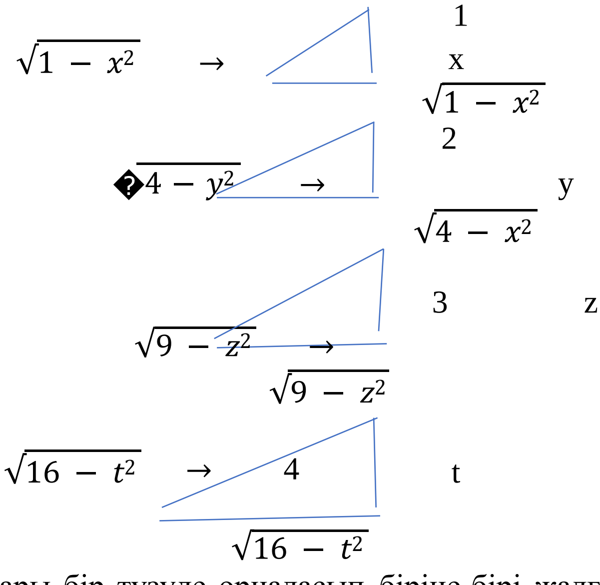
«Бұрыштық» қабырғалары шеңбермен $a = -\sqrt{2}$ мәнінде жанасады. Сонда жүйе дәл екі шешімге ие болады, егер $a \in \{-\sqrt{2}\} \cup (-1; 1)$.

Есеп 4. Теңдеулер жүйесін шешіңдер:

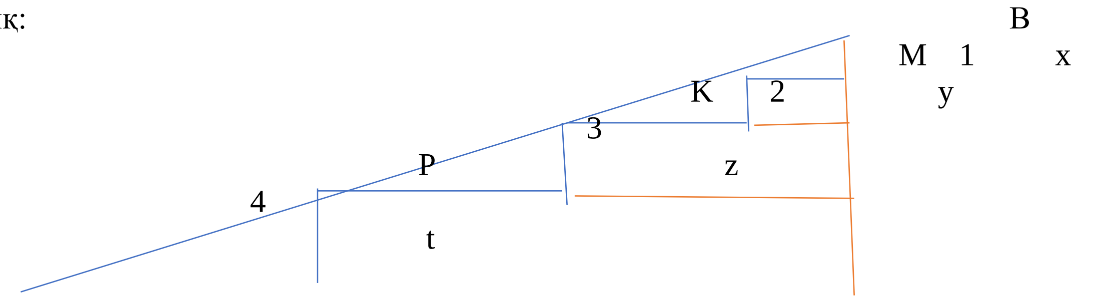
$$\begin{cases} x + y + z + t = 6, \\ \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - y^2} + \sqrt{9 - z^2} + \sqrt{16 - t^2} = 8. \end{cases}$$

Шешуі. Берілген теңдеулер жүйесінде төрт айнымалы, екі теңдеу, төрт квадрат түбір бар. Теңлдеулер жүйесін шешу үшін геометрияны қолданалық. Екінші теңдеулегі қосылғыштар тік бұрышты үшбұрыштың катеттерін еске түсіреді, яғни Пифагор теоремасын.

Шынында да:



Енді үшбұрыштарды гипетенузалары бір түзуде орналасып, біріне-бірі жалғастындай етіп салалық:



A C

A,P,K,M,B нүктелері бір түзуде жататындығы салуымыз бойынша орынды

Сонда ABC үшбұрышының катеттері нені беретіндігін көрсетелік:

$$BC = x + y + Z + t = 6,\ AC = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - y^2} + \sqrt{9 - z^2} + \sqrt{16 - t^2} = 8.$$

ABC үшбұрышы - тікбұрышты,өйткені: $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10.$

Енді BC катетін құрайтын x, y, z, t бөліктер нені білдіретінін түсіну қажет.

P, K, M нүктелерден параллель түзулер жүргізелік. Енді пропорционал кесінділер туралы Фалес теоремасын қолданамыз. Пропорционалдық коэффициентті q арқылы белгілелік, сонда пропорционал кесінділер туралы Фалес теоремасы бойынша:

$$\left.\begin{array}{l} x = q, \\ y = 2q, \\ z = 3q, \\ t = 4q \end{array}\right| \rightarrow 10q = 6,\ q = 0,6.$$

Демек, x = 0,6, y = 1,2, z = 2,8, t = 2,4.

Есеп 5. Теңдеулер жүйесін оң сандарда шешіңдер:

$$\begin{cases} x + y + z = \sqrt{3}, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Шешуі. Ізделінді шамалар мәндері оң сандар болғандықтан x, y, z – кейбір үшбұрыштың қабырғаларының үзындықтары болсын делік. Сонда берілген жүйенің бірінші теңдеуінің сол бөлігі үшбұрыштың қабырғаларының ұзындықтарының қосындысы, яғни оның периметрі болып табылады, ал екінші теңдеудің сол бөлігі - үшбұрыш қабырғаларының ұзындықтарының квадраттарының қосындысын өрнектейді.

Бірінші теңдеуден табамыз: $z = \sqrt{3} - (x + y)$.

Бұл өрнекті екінші теңдеуге қойып, аламыз: $x^2 + y^2 + (\sqrt{3} - (x + y))^2 = 1$ (1), бұдан получаем x қатысты квадрат теңдеу алынады $x^2 + (y - \sqrt{3})x - (y^2 - y\sqrt{3} + 1) = 0$,

теңдеудің дискриминанты: $D = -(y\sqrt{3} - 1)^2 \geq 0$. Теңдік $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ болғанда орындалады. (1) теңдеуден табамыз: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$., ал $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Демек, қарастырылған үшбұрыш тең қабырғалы:

ответ. $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$., $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$.,$z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

c) *Векторлар көмегімен шығарылатын есептер*.

Есеп 6. a,b,c - *теріс емес сандар. Егер* $abc = 1$, *онда*

$$\frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(a+c)} + \frac{1}{c^2(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$ *теңсіздігін дәлелдеңдер.*

Дәлелдеу. Белгілеулен енгізелік: $\frac{1}{a} = x, \frac{1}{b} = y, \frac{1}{c} = z$. Сонда xyz = 1 және берілген теңсіздік мына түрге келеді: :

$$S = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Енді Коши-Буняковскийдің векторлық теңсіздігін пайдаланып, аламыз:

$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2$. Мұнда вектолардың координаталары :

$$\vec{a}\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}; \frac{y}{\sqrt{z+x}}; \frac{z}{\sqrt{x+y}}\right), \vec{b}(\sqrt{y+z}; \sqrt{z+x}; \sqrt{x+y}).$$

$\vec{a}\ \vec{b}\ {}_2 \quad {}_2 \quad x^2 \quad y^2 \quad z^2$

$$(a \cdot b) \quad = (x + y + z) \quad \leq (\frac{}{y+z} + \frac{}{z+x} + \frac{}{x+y})(y + z + z + x + x + y),$$

$$(x+y+z)^2 \le 2\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right)(x+y+z),$$

$$S=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \ge \frac{1}{2}(x+y+z).$$

Енді арифметикалық және геометриялық орталар арасындағы қатыс бойынша табамыз:

$$\frac{x+y+z}{3} \ge \sqrt[3]{xyz}\,,\; S=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \ge \frac{1}{3}(x+y+z)\cdot\frac{3}{2} \ge \sqrt[3]{xyz}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

Қолданылған әдебиеттер тізімі:

1. Генкель Г.З. Геометрические решения негеометрических задач. – Москва: Просвещение, 2007.
2. Генкин Г.З. Геометрические решения алгебраических задач. «Математика в школе»,
№7, 2001, 61 с.
3. Готман Э.Г., Скопец З.А. Решение геометрических задач аналитическим методом. –
М.: Просвещение, 1979.
4. Кравцев С.Ю., Макаров Ю.И., Максимов М.И. и др. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных. – М.: Экзамен, 2001.
5. Киселева Ю.С. Методическое пособие по теме: Использование геометрических методов.
6. Лысенко Ф.Ф. Учимся решать задачи с параметром. – Ростов-на-Дону, Легион, 2012.
7. Мигина А. Решение уравнений с применением оригинальных приемов. – Газета
«Математика», №37, 2001, 26 с.
8. Попов В.А. Иррациональные уравнения, неравенства и косинусов. «Математика в школе», №6, 1998.
9. Филимонов В.А. Геометрия помогает решить задачу. «Математика в школе», №2-3,
19 с.